Тема: Окружность. Круг.

Основные знания и умения:

Знать: определение окружности, и основных их элементов; возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности, знать определение касательной, свойство и признак касательной; теорему о вписанном угле; свойство пересекающихся хорд; формулу длины окружности, длину дуги, определение круга и его частей, формулу площади круга, площади частей круга.

Уметь: выполнять построение окружности (круга) и основных ее элементов; объяснять, что такое центр окружности, радиус, хорда, диаметр, дуга, касательная окружности; применять полученные теоретические знания при решении задач.

План:

1. Окружность. Элементы окружности.
2. Определение круга.
3. Касательной к окружности.
4. Свойства касательной к окружности.
5. Свойство пересекающихся хорд.
6. Уравнение окружности с центром в начале координат.
7. Уравнение окружности с центром в произвольной точке.
8. Определение центрального и вписанного углов.
9. Градусная мера дуги, обозначение, измерение.
10. Теорема о величине вписанного угла.
11. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.
12. Формулы длины окружности и дуги окружности.
13. Формулы площади круга и его частей.
14. Решение заданий.

Окружность. Круг

Определение: **Окружность** – геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется **центром окружности**.

Радиус окружности R – отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности.

Хорда – отрезок, соединяющий две точки на окружности.

Диаметр – хорда, проходящая через центр окружности, он равен двум радиусам окружности (d=2R).

Дуга – часть окружности, расположенная между двумя точками окружности.

Секущая – прямая, проходящая через две точки окружности.

Определение: **Круг -** часть плоскости, ограниченная окружностью (это геометрическая фигура плоскости)

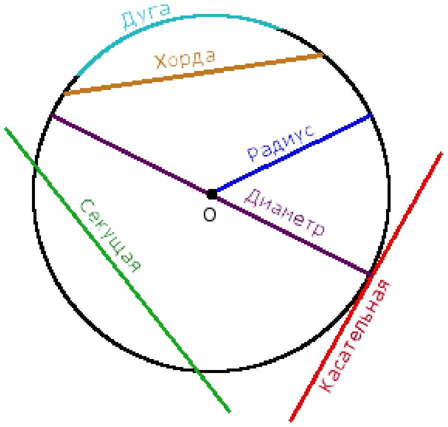


Рис.1 Окружность и ее элементы

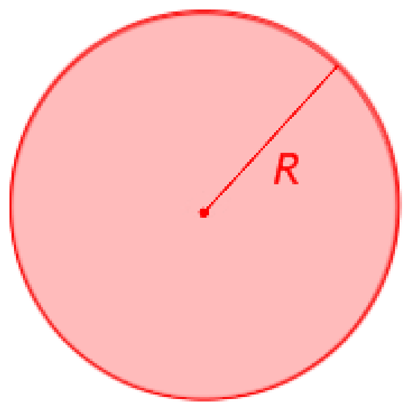
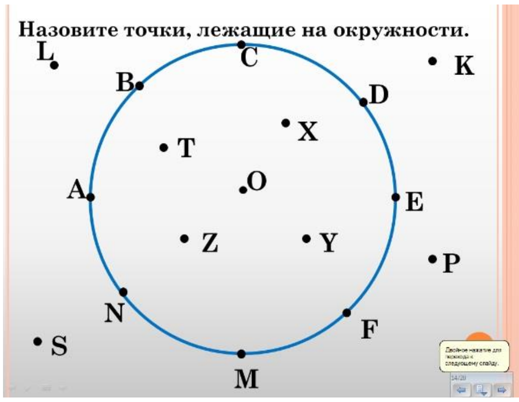


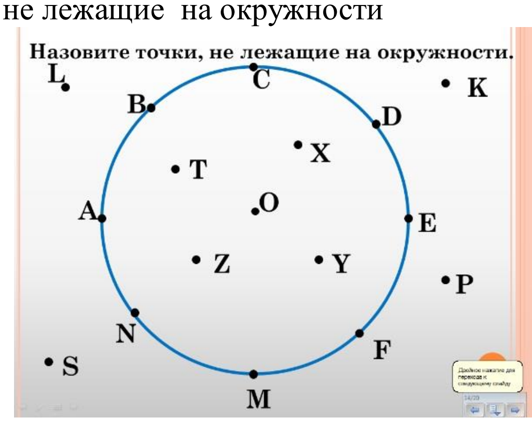
Рис.2 Круг

Задание:

1. Назовите все точки, лежащие на окружности



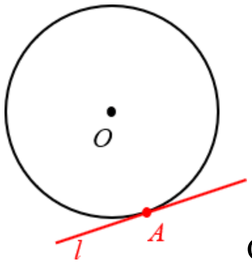
2. Назовите все точки, не лежащие на окружности



3. По данному рисунку перечислите все диаметры, хорды и радиусы окружности.

Касательная к окружности

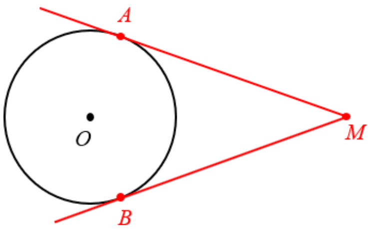
Определение. Касательная к окружности — это прямая, которая имеет одну общую точку с окружностью.



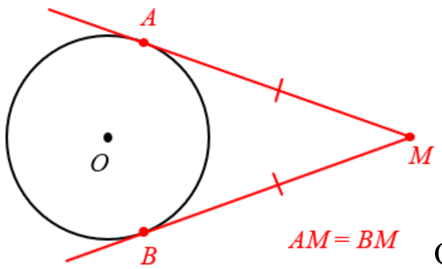
Окружность с центром O касается прямой l в точке A

Основные свойства касательных к окружности

1. *Из любой точки* M *вне окружности можно провести две касательных*



2. *Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны.*

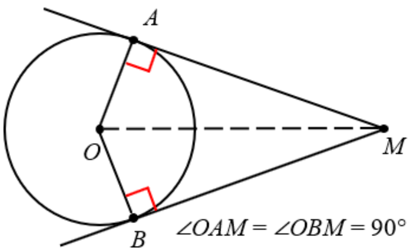


Отрезки AM и BM равны

3. *Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания*

Проведём радиусы OA и OB. Видно, что углы OAM и OBM — прямые.

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

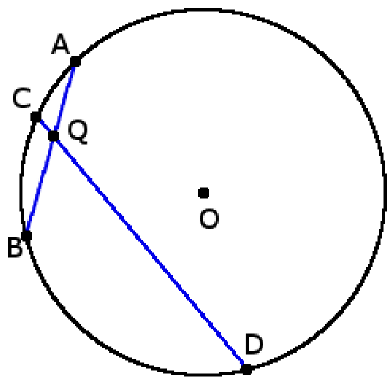


Примечание: Если провести отрезок OM, то мы получим два равных треугольника: OAM и OBM (ОМ – биссектриса угла АМВ).

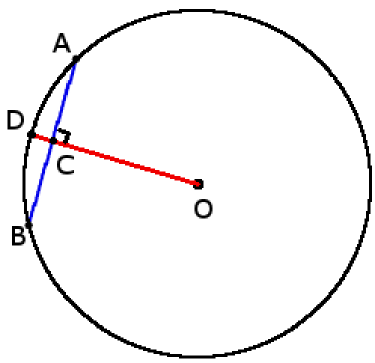
Свойство пересекающихся хорд

Произведения длин отрезков пересекающихся хорд, на которые эти хорды делятся точкой пересечения, есть число постоянное:

$$\boxed{AQ \cdot QB = CQ \cdot QD}$$



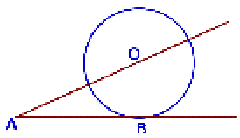
Примечание: Если радиус окружности перпендикулярен к хорде, то он разделяет хорду пополам в точке их пересечения:



если $OD \perp AB$, то $AC = BC$

Выполнение заданий

Пример 1. К окружности с центром в точке О проведены касательная АВ и секущая АО. Найдите радиус окружности, если АВ=12см, АО=13см.



Решение:

Проведем радиус ОВ, ОВ$\perp$ АВ (*по свойству касательной к окружности*).

Значит, ▲ АОВ – прямоугольный. Воспользуемся теоремой Пифагора:

$AO^2 = AB^2 + OB^2$

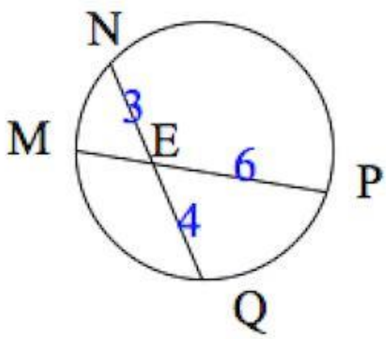
$13^2 = 12^2 + OB^2$

$OB^2 = 169 – 144 = 25$

ОВ = 5 (см)

Ответ: 5 см

Пример 2. Найти длину отрезка МЕ:



Решение:
По свойству пересекающихся хорд: **ME * EP = NE * EQ**

ME * 6 = 3 * 4

ME = 12 / 6

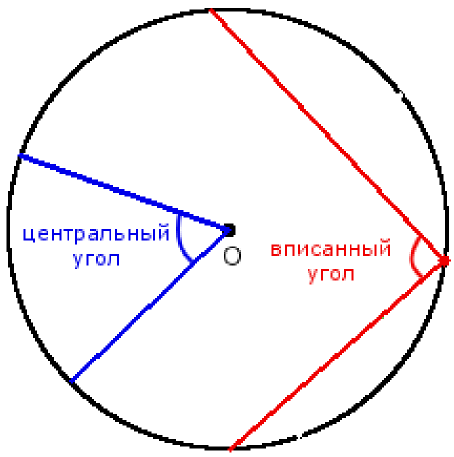
ME = 2

Ответ: ME = 2 (ед.)

Вписанный угол. Центральный угол.

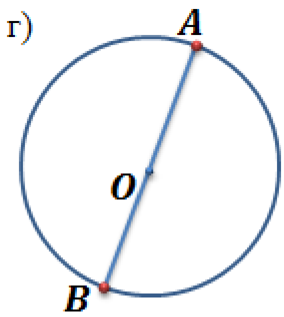
Определение: **Вписанным углом** называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами окружности

Определение: **Центральным углом** называется вписанный угол, вершина которого находится в центре окружности (т.е. стороны угла – это радиусы окружности)

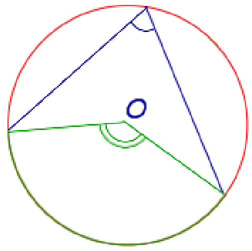
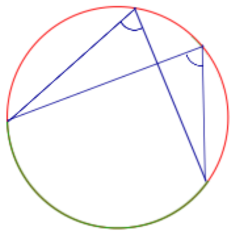
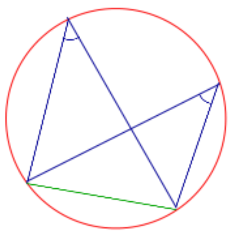
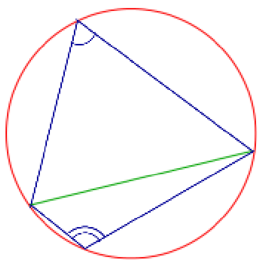
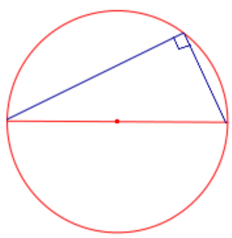


Определение: **Угловой мерой** (угловой величиной) дуги окружности является величина центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Примечание: Градусная мера окружности равна 360^0 (угол AOB $=180^0$)

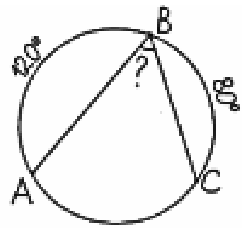


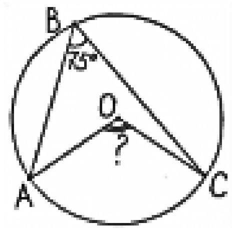
Теоремы о вписанных и центральных углах

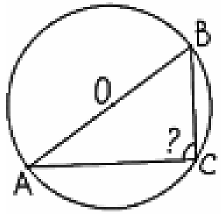
Фигура	Рисунок	Теорема
Вписанный угол		Величина вписанного угла **равна половине соответствующего** центрального угла
Вписанный угол		Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, **равны**.
Вписанный угол		Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, **равны,** если их вершины лежат **по одну сторону** от этой хорды
Вписанный угол		Два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же хорду, **в сумме составляют** 180°, если их вершины лежат **по разные стороны** от этой хорды
Вписанный угол		Вписанный угол, который **опирается на диаметр,** является **прямым углом**

Выполнение заданий.

Пример 3. Найти неизвестные углы **– для самостоятельного решения**

а) 

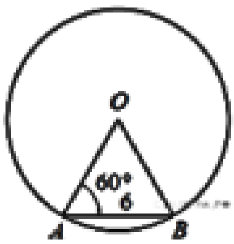
б) 

в) 

Сверим ответы:

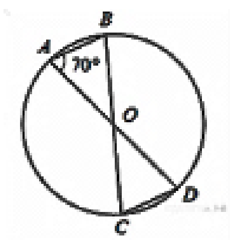
Ответ. а)80, б)150, в) 90

Пример 4. Центральный угол *AOB* опирается на хорду *AB* длиной 6 см. При этом угол *OAB* равен 60°. Найдите радиус окружности.

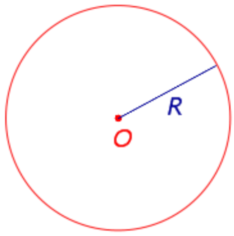
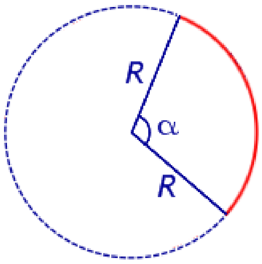


Решение: ▲AOB – равнобедренный, т.к. OA= OB= R.
По условию угол *OAB* равен 60°, значит угол OBA равен 60^0, тогда угол AOB равен 60^0
Следовательно, ▲AOB - равносторонний, OA= 6 см.
Ответ: 6 см.

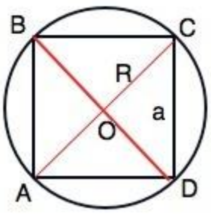
Пример 5. – для самостоятельного решения
В окружности с центром в точке *O* проведены диаметры *AD* и *BC*, угол *OAB* равен 70°. Найдите величину угла *OCD*.



(Ответ. 70^0)

Формулы длины окружности и дуги окружности		
Числовая характеристика	**Рисунок**	**Формула**
Длина окружности		$C = 2\pi R$ где *R* – радиус круга,
Длина дуги		$L(\alpha) = \dfrac{\pi R \alpha}{180^0}$, где α - величина угла выражена в градусах

Пример 6. Длина окружности, описанного около квадрата, равна 9π (см). Найдите площадь квадрата.



Решение: Длина окружности рассчитывается по формуле $C = 2\pi R$, где R - радиус окружности. $2\pi R = 9\pi$, отсюда R= 4,5 (см) , диаметр AC равен 9 см.

Рассмотрим ▲ACD - прямоугольный (угол D = 90^0)и равнобедренный, т.к. дан квадрат.

По теореме Пифагора:

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$9^2 = 2 * AD^2$

$AD^2 = 40{,}5$ (см).

Итак, искомая площадь квадрата равна $S = AD^2 = 40{,}5$ (см^2)

Ответ: $S = 40{,}5$ (см^2)

Уравнение окружности на координатной плоскости

Рассмотрим на координатной плоскости Oxy окружность радиуса R с центром в точке $A_0\ (x_0\ ;\ y_0)$.

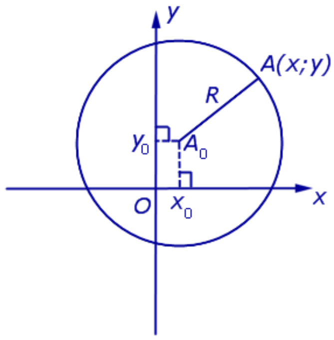
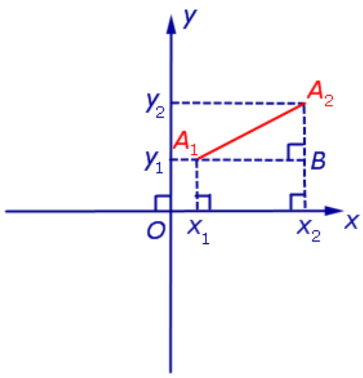


Рис.

Расстояние от любой точки окружности до центра равно радиусу, то, в соответствии с формулой расстояния между двумя точками, получаем:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$	***- уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A_0\ (x_0\ ;\ y_0)$***
$x^2 + y^2 = R^2.$	***- уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат***

Примечание: **Расстояние между двумя точками** координатной плоскости $A_1\ (x_1\ ;\ y_1)$ и $A_2\ (x_2\ ;\ y_2)$



Т.к. в прямоугольном треугольнике A_1A_2B длина катета A_1B равна $|x_2 - x_1|$ а длина катета A_2B равна $|y_2 - y_1|$, то по теореме Пифагора

$$|A_1A_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Выполнение заданий

Пример 7.

Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 49$

Решение:

$x+2=0$ $y-5=0$ $R^2=49$

$x=-2$ $y=5$ $R=7$

Ответ: О (-2; 5); R= 7

Пример . – для самостоятельного решения

Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

а) $(x+7)^2 + (y+1)^2 = 36$	б) $(x-6)^2 + (y+15)^2 = 81$	в) $x^2 + (y-9)^2 = 2$

Сверим ответы:

О (-7; -1); R= 6	*О (6; -15); R= 9*	*О (0; 9); R=* $\sqrt{2}$

Пример 8.

Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра *M* и радиус *R:*

$M(1; -4),\ R = 2;$

Решение.

Подставляем данные в уравнение окружности: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.

$X_0 = 1,\ y_0 = -4\ \ R = 2,$

Получим

$(X-1)^2 + (У+4)^2 = 4$

Пример . – для самостоятельного решения

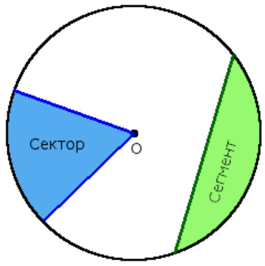
Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра *M* и радиус *R:*

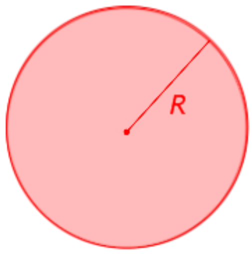
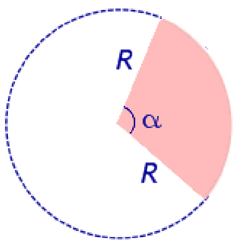
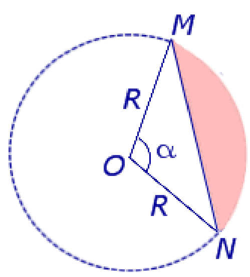
а) $M(0; -5),\ R = 3;$	б) $M(1; -1),\ R = ; = \sqrt{11}$	в) $M(0; 0),\ R = 8;$

Сверим ответы:

а) $x^2 + (y-+5)^2 = 81$	б) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 11$	в) $x^2 + y^2 = 64$

Части круга

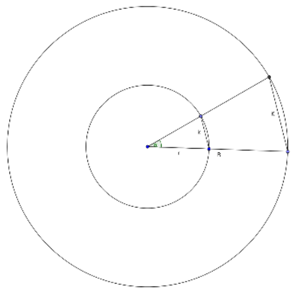
Круговой сектор – часть круга, ограниченная двумя радиусами.	
Круговой сегмент – часть круга, ограниченная хордой.	

Формулы для площади круга и его частей		
Числовая характеристика	**Рисунок**	**Формула**
Площадь круга		$S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$, где R – радиус круга, D – диаметр круга
Площадь сектора		$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^0}$
Площадь сегмента		$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180^0} - \sin\alpha\right)R^2$,

Примечание:

Определение: **Концентрические окружности** - окружности с различными радиусами, которые имеют общий центр

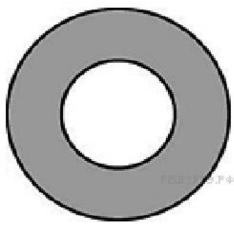
Определение: **Кольцо** - часть плоскости ограниченная двумя концентрическими окружностями



Пример 9.

№1

Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.



$$s_{бол.круга} = \pi \cdot \frac{16}{\pi} = 16$$

$$s_{мал.круга} = \pi \cdot \frac{4}{\pi} = 4$$

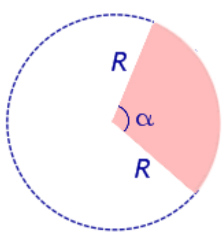
$$S = 16 - 4 = 12$$

Ответ: 12

Ответ: 12 (ед.^{2})

Пример 10. Из круга диаметр которого 10 см. вырезан сектор с дугой 60^0.

Найдите площадь оставшейся части круга.



Решение:

$S_{\text{остав.круга}} = S_{\text{круга}} - S_{\text{сектора}}$

$S_{\text{круга}} = \pi * 10^2 = 100\,\pi\ (\text{см}^2)$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^0}$$

$S_{\text{сектора}} = 100\,\pi * 60^0 / 360^0 = 100\,\pi / 6 = 50\,\pi / 3\ (\text{см}^2)$

$S_{\text{остав.круга}} = 100\,\pi - 50\,\pi / 3 = 250\,\pi / 3\ (\text{см}^2)$

Ответ: $S_{\text{остав.круга}} = 83\frac{\pi}{3}\ (\text{см}^2)$

Контрольные вопросы:

15. Что такое окружность? Элементы окружности
16. Что такое круг?
17. Какая прямая называется касательной к окружности?
18. Какие свойства касательной Вам известны?
19. Свойство пересекающихся хорд
20. Уравнение окружности с центром в начале координат.
21. Уравнение окружности с центром в произвольной точке.
22. Определение центрального и вписанного углов.
23. Градусная мера дуги, обозначение, измерение.
24. Теорема о величине вписанного угла
25. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу
26. Формулы длины окружности и дуги окружности
27. Формулы площади круга и его частей.

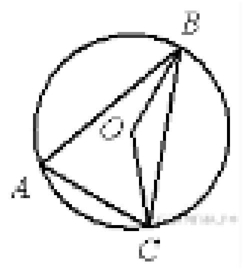
РЕБЯТА!

ВЫ МОЛОДЦЫ!!!

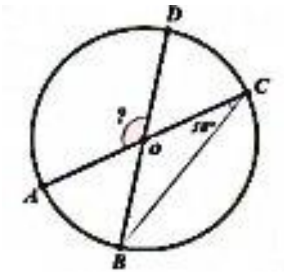
Желаете еще поработать?

Выполнить задания (задания несложные – на основные понятия и определения):

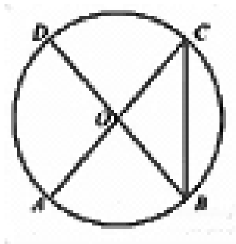
1.Точка *O* — центр окружности, $\angle BAC = 70°$ (см. рисунок). Найдите величину угла *BOC*. (Ответ.140^0)



2. AC и BD- диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 38^0. Найдите угол AOD. (Ответ. 104^0)

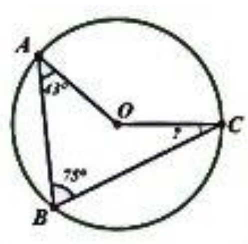


3. Величина центрального угла *AOD* равна 110°. Найдите величину вписанного угла *ACB*. (Ответ. 35^0)



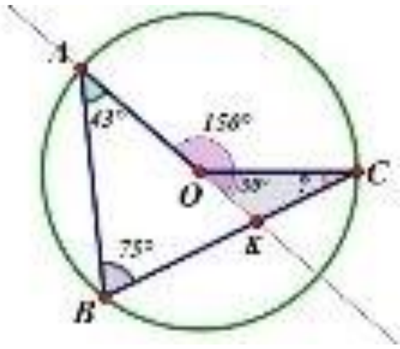
4. Точка O- центр окружности, на которой лежат точки A,B и C. Известно, что угол ABC равен 75^0 и угол OAB равен 43^0. Найдите угол BCO.

Решение.



Центральный ∠AOC опирается на ту же дугу, что и вписанный ∠ ABC, следовательно,

∠AOC= 2•∠ABC= 2• 75 = 150^0



Проведем диаметр через точку А – он пересекает хорду ВС в точке К.

∠КОС в сумме с ∠ АОС дает 180^0 (так как они смежные),

следовательно,

∠КОС = 180 – 150 = 30^0

∠ ОКС - внешний угол треугольника АВК и равен сумме двух углов, не смежных с ним:

∠ОКС = 75 + 43 = 118^0,

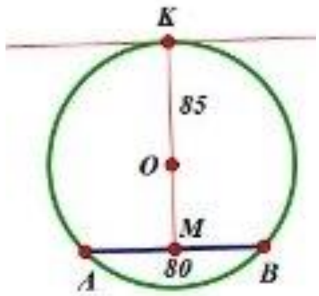
тогда по теореме о сумме углов треугольника

∠ВСО = ∠КСО= 180 – 118 – 30 = 32^0

Ответ: ∠ВСО = 32^0

5. Радиус окружности с центром О равен 85 см, длина хорды АВ равна 80 см. Найдите расстояние от хорды АВ до параллельной ей касательной *k*

Решение.



Радиус окружности, проведенный к точке касания перпендикулярен касательной *k*.

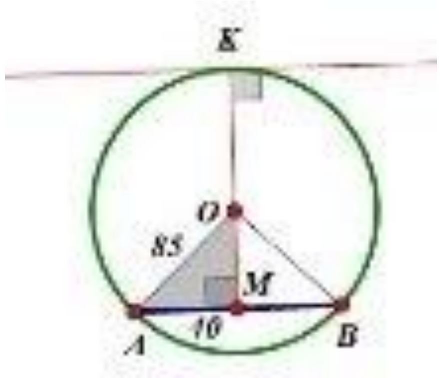
Хорда параллельна касательной *k*, следовательно, АВ перпендикулярна МК.

Нам нужно найти длину МК:

МК= МО+ОК= МО+85.

Найдем МО.

Для этого проведем радиусы АО=ОВ=R и рассмотрим ▲АОВ.



Этот треугольник равнобедренный (боковые стороны равны)

В равнобедренном треугольнике высота ОМ является медианой, то есть

АМ= МВ= 40 см.

ОМ найдем по теореме Пифагора из прямоугольного ▲АОМ:

$AO^2 = AM^2 + OM^2$

$OM^2 = AO^2 – AM^2$

$OM^2 = 85^2 – 40^2 = 7225 – 1600 = 5625 = 75^2$

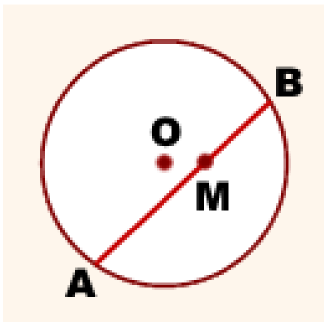
ОМ = 75 см,

ОК = 85+ 75= 160 см.

Ответ: 160 см

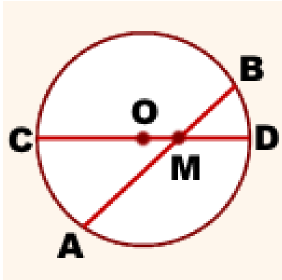
6. Через точку М, лежащую внутри окружности, проведена хорда, которая делится точкой М на отрезки, длины которых равны 6 см и 16 см. Найти расстояние от точки М до центра окружности, если радиус окружности равен 14 см.

   Решение:



Найти ОМ

Проведём через точку М диаметр CD.



По свойству отрезков пересекающихся хорд:

AM · MB=CM · MD

Пусть OM=x см (x>0).

Так как радиус равен 14 см, то MD= (14-x) см, CM=(14+x) см.

Составим и решим уравнение:

16 · 6=(14+x)· (14-x)

$96=196-x^2$

$x^2=100$

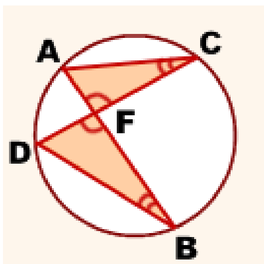
x=10

Следовательно, расстояние от точки M до центра окружности равно 10 см.

Ответ: 10 см.

7. В окружности проведены хорды AB и CD , пересекающиеся в точке F. Найти длину отрезка AC, если AF=6 см, DF=8 см, BD=20 см.

Решение:



В треугольниках AFC и BFD:

∠AFC=∠BFD (как вертикальные);

∠ACF=∠DBF (как вписанные углы, опирающиеся на одну хорду AD).

Следовательно, треугольники AFC и BFD подобны (по двум углам).

Поэтому

$$\frac{AF}{BF} = \frac{CF}{DF}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{CF}{20}, \Rightarrow CF = \frac{6 \cdot 20}{8} = 15.$$

Ответ: 15 см.