Тема: Векторы и действия над ними

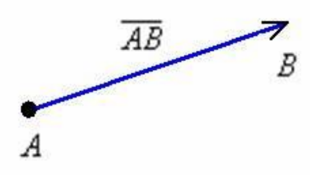
Основные знания и умения.
З н а т ь : определения вектора, коллинеарных векторов, базиса; закона сложения векторов, умножения вектора на число; скалярного произведения двух векторов, его свойства и физический смысл; формулу скалярного произведения двух векторов, заданных своими координатами, формулу для вычисления угла между векторами.
У м е т ь : вычислять координаты, длину вектора, выяснять коллинеарность векторов, выполнять действия над векторами.

План:

1. Определение вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы.
2. Операции над векторами.
3. Декартова прямоугольная система координат на плоскости. Координаты вектора. Разложение вектора по базису. Длина вектора. Условие коллинеарности векторов
4. Действия над векторами, заданными своими координатами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число).
5. Скалярное произведение векторов и его свойства.
6. Условие перпендикулярности двух векторов.
7. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами.
8. Вычисление угла между векторами.
9. Координаты середины отрезка.

Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overline{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери техникума или выйти из дверей техникума – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\overline{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

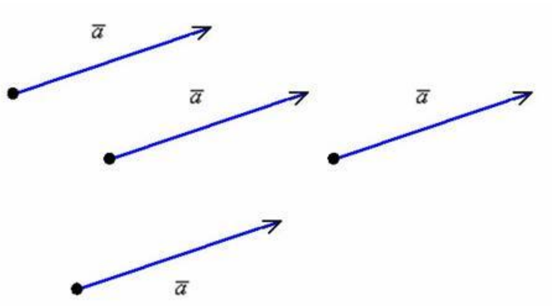
О способах записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \ldots$ и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

Многие сразу обратили внимание на палочку без стрелочки в обозначении $\overline{AB}$ и сказали, там же вверху еще стрелку ставят! Верно, можно записать со стрелкой: $\vec{AB}$, но допустима и **запись** $\overline{AB}$**, которую будем использовать в дальнейшем**. В учебной литературе выделяют буквы жирным шрифтом: $\mathbf{AB}$, подразумевая тем самым, что это вектор.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости записать маленькой латинской буквой $\overline{a}$.

Вектор можно отложить от любой точки:



Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю. Логично. Длина вектора обозначается знаком модуля: $\left|\overline{AB}\right|$, $|\overline{a}|$. Как находить длину вектора мы узнаем чуть позже.

Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной или на параллельных прямых.

Пусть два ненулевых вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны. Если при этом лучи АВ и CD сонаправлены, то $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **противоположно направленными**.

Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором.

Запись $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ означает, что векторы сонаправлены,

а запись $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ - векторы противоположно направлены.

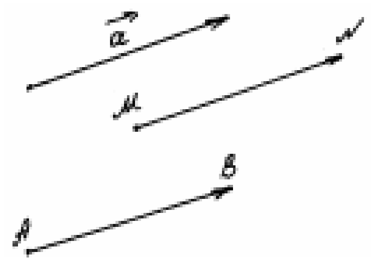


рис. 2

Два вектора равны, если они, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину.

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены.

Операции над векторами

В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами: *сложение по правилу треугольника, сложение по правилу параллелограмма, правило разности векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов.*

1. **Сложение векторов**

- по правилу треугольника (для векторов, у которых нет общего начала)

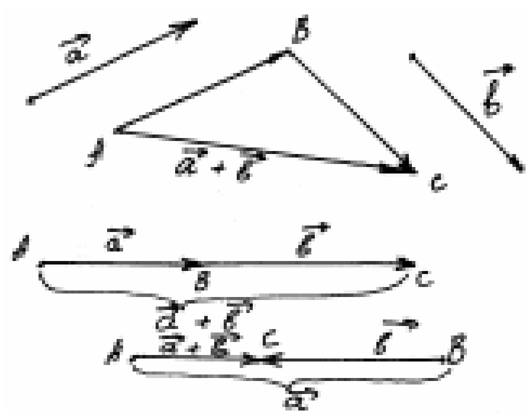


рис. 3

для этого нужно от произвольной точки пространства отложить вектор $\overline{AB}$, равный $\bar{a}$, затем от точки В отложить вектор $\overline{BC}$, равный $\bar{b}$.

Вектор $\overline{AC}$ называется суммой $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Таким образом $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, для любых трех точек А, В и С.

- по правилу параллелограмма (для векторов с общим началом)

рис. 4

для этого векторы откладывают от одной точки.

2. **Вычитание векторов:**

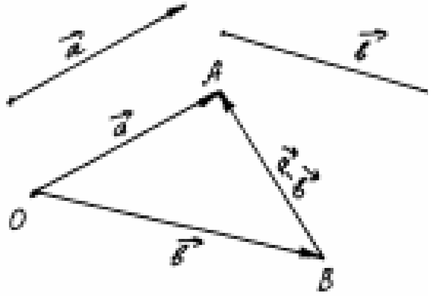


рис. 5

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор, сумма которого **с** вектором $\bar{b}$ равна вектору $\bar{a}$.

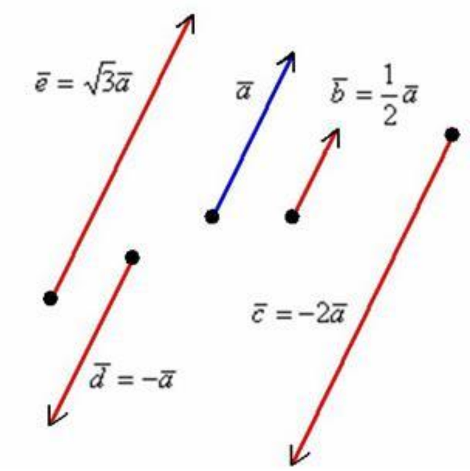
Разность $\bar{a}$ - $\bar{b}$ можно найти по формуле
$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$,
где $(-\bar{b})$ - вектор, противоположный вектору $\bar{b}$.

$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$.

3. **Умножение вектора на число.**

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число λ является такой вектор $\overline{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, причём векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:



Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель λ отрицательный, то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах $-1 < \lambda < 0$ или $0 < \lambda < 1$, то длина вектора уменьшается. Так, длина вектора $\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{a}$ в два раза меньше длины вектора $\overline{a}$. Если множитель λ по модулю больше единицы, то длина вектора увеличивается в λ раз.

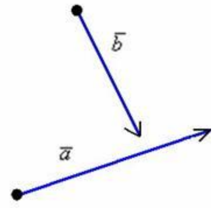
3) Обратите внимание, что **все векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, $\overline{c} = -2\overline{a}$. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

4) Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{e}$ сонаправлены. Векторы $\overline{c}$ и $\overline{d}$ также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

4. Умножение векторов - скалярное произведение (см.ниже)

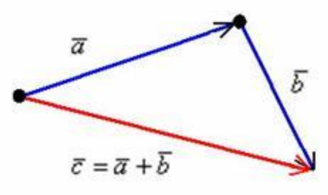
Пример:

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$:



Требуется найти сумму данных векторов.

В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор $\overline{b}$ от *конца* вектора $\overline{a}$:



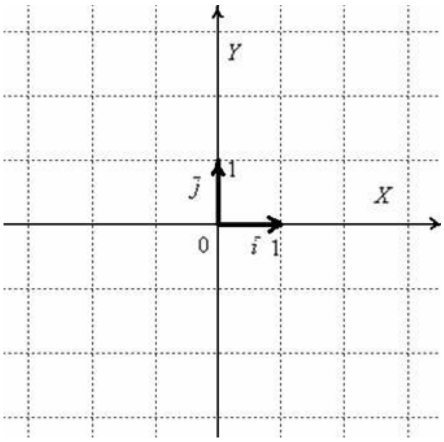
Сложение векторов по правилу треугольника заключается в следующем: *от конца первого вектора нарисовать второй вектор, также учитывая и его размер, и его направление*.

Результирующим вектором будет вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец - с концом второго

Если вектор $\overline{b}$ отложить от *начала* вектора $\overline{a}$, то получится эквивалентное *правило параллелограмма* сложения векторов.

Координаты вектора на плоскости

Рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$:



Векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ **ортогональны.**

Ортогональны = Перпендикулярны $\bar{i} \perp \bar{j}$

Новые термины: вместо параллельности и перпендикулярности используем соответственно слова *коллинеарность* и *ортогональность*.

Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Простыми словами, базис и начало координат задают всю систему – это фундамент.

Иногда построенный базис называют *ортонормированным* базисом плоскости: «орто» – потому что координатные векторы ортогональны, прилагательное «нормированный» означает единичный, т.е. длины векторов базиса равны единице.

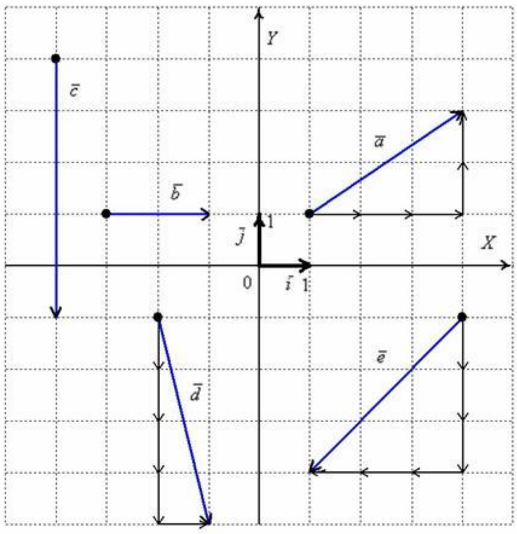
Обозначение: Базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: $(\bar{i};\bar{j})$.

Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

Любой вектор $\bar{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде:

$$\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j},$$

где v_1, v_2 – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ называется **разложением вектора** $\bar{v}$ **по базису** $(\bar{i};\bar{j})$.



Например,

Вектор $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ - по чертежу хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются только что рассмотренные:

1) правило умножения вектора на число: $3\bar{i}$ и $2\bar{j}$;

2) сложение векторов по правилу треугольника: $3\bar{i} + 2\bar{j}$.

Векторы $\bar{b} = 2\bar{i}$, $\bar{c} = -5\bar{j}$ иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор $\bar{b} = 2\bar{i}$ сонаправлен с базисным вектором $\bar{i}$, вектор $\bar{c} = -5\bar{j}$ направлен противоположно по отношению к базисному вектору $\bar{j}$

У данных векторов одна из координат равна нулю

$\bar{b} = 2\bar{i} + 0 \cdot \bar{j}$

$\bar{c} = 0 \cdot \bar{i} - 5\bar{j}$

А базисные векторы: $\bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j}, \quad \bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j}$ (они выражаются сами через себя).

И, наконец: $\bar{d} = \bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{e} = -3\bar{i} - 3\bar{j}$ - вычитание -это частный случай сложения

.разложения векторов «дэ» и «е» записываются в виде суммы: $\bar{d} = \bar{i} + (-4\bar{j})$, $\bar{e} = -3\bar{i} + (-3\bar{j})$. Переставьте слагаемые местами и проследите по чертежу, как чётко в этих ситуациях работает сложение векторов по правилу треугольника.

Рассмотренное разложение вида $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ иногда называют разложением вектора *в системе орт* (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, распространён следующий вариант:

$\bar{a}(3;\ 2)$
$\bar{b}(2;\ 0)$
$\bar{c}(0;\ -5)$
$\bar{d}(1;\ -4)$
$\bar{e}(-3;\ -3)$

Или со знаком равенства:

$\bar{a} = (3;\ 2)$
$\bar{b} = (2;\ 0)$
$\bar{c} = (0;\ -5)$
$\bar{d} = (1;\ -4)$
$\bar{e} = (-3;\ -3)$

Сами базисные векторы записываются так: $\bar{i}(1;\ 0)$ и $\bar{j}(0;\ 1)$

То есть, в круглых скобках указываются координаты вектора.

В практических задачах используются все три варианта записи.

Координаты векторов переставлять нельзя. **Строго на первом месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору $\bar{i}$, **строго на втором месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору $\bar{j}$. Действительно, $\bar{v}(1;\ 5)$ и $\bar{w}(5;\ 1)$ – это ведь два разных вектора.

С координатами на плоскости разобрались.

Нахождение координат вектора по двум точкам

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

Из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Пример. Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

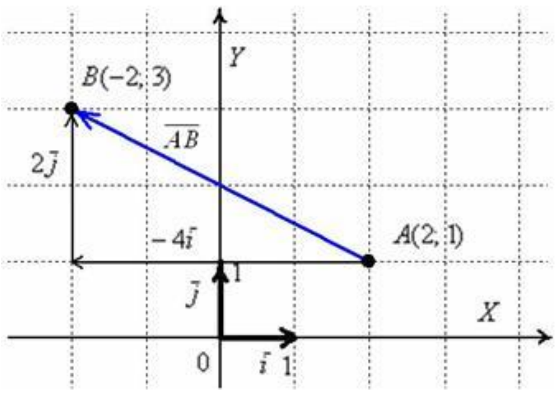
Решение:

$\overline{AB}(-2-2; 3-1) = \overline{AB}(-4; 2)$

или

$\overline{AB} = (-2-2)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$ - разложен по базису.

В целях пояснения изобразим на координатной плоскости



Примечание: Обязательно нужно понимать **различие между координатами точек и координатами векторов**:

Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

Координаты же вектора – это его разложение по базису $(\bar{i}; \bar{j})$, в данном случае $\overline{AB} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$.

Ответ: $\overline{AB}(-4; 2)$

Нахождение длины отрезка

Длина обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Формула легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример.

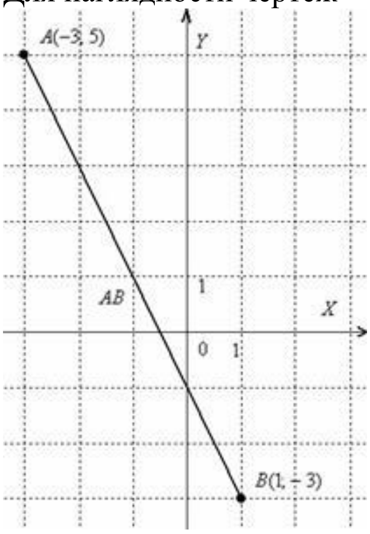
Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Для наглядности чертёж



Отрезок AB – **это не вектор**, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя. Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ $|AB| \approx 8{,}94$ ед. можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка.

В ответе ставим размерность: «единицы»– сокращенно «ед.».

Нахождение длины вектора

Если дан вектор плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле

$$\overline{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Формула (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример 1. Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение:

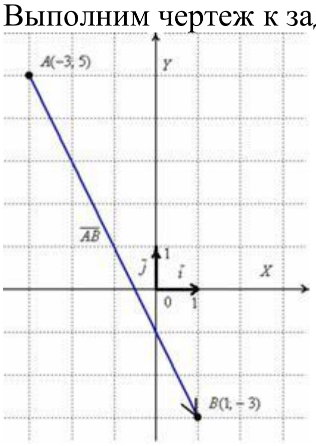
Сначала найдём координаты вектора $\overline{AB}$:
$\overline{AB}(1-(-3); -3-5) = \overline{AB}(4; -8)$

По формуле $\overline{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора:
(учитываем, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$:
$|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Примечание: Не забываем указывать размерность – «единицы»! Всегда нужно рассчитывать приближенное значение, если этого не требуется в условии? Округление целесообразно проводить до 2-3 знаков после запятой.

Выполним чертеж к задаче:



Здесь речь идёт о векторе, а не об отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости.

Геометрически очевидно, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$. Так же очевидно, что длина вектора $\overline{BA}$ будет такой же. По итогу: $|AB| = |\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

Действия с векторами, заданными своими координатами

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) **Правило сложения (вычитания) векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости $\bar{v}=(v_1; v_2)$ и $\bar{w}=(w_1; w_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, необходимо **сложить их соответствующие координаты**:

$$\bar{v}+\bar{w}=(v_1+w_1; v_2+w_2).$$

Частный случай – формула разности векторов:

$$\bar{v}-\bar{w}=(v_1-w_1; v_2-w_2).$$

2) **Правило умножения вектора на число.** Для того чтобы вектор $\bar{v}=(v_1; v_2)$ умножить на число λ, необходимо каждую координату данного вектора умножить на число λ: $\lambda\bar{v}=(\lambda v_1; \lambda v_2)$.

Пример 1.

Даны векторы

$\bar{a}(1; -2)$ и $\bar{b}(2; 3)$.

Найти

$2\bar{a}$, $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$

Решение:

$$2\bar{a}=2(1; -2)=(2; -4)$$
$$\bar{a}+\bar{b}=(1; -2)+(2; 3)=(1+2; -2+3)=(3; 1)$$
$$\bar{a}-\bar{b}=(1; -2)-(2; 3)=(1-2; -2-3)=(-1; -5)$$

Ответ:

$2\bar{a}=(2; -4)$, $\bar{a}+\bar{b}=(3; 1)$, $\bar{a}-\bar{b}=(-1; -5)$

Примечание: Чертеж в подобных задачах строить не надо

Как определить коллинеарность векторов на плоскости?

Для того чтобы два вектора плоскости $\overline{v}(v_1;\, v_2),\ \overline{w}(w_1;\, w_2)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны

$$\begin{cases} v_1 = \lambda w_1 \\ v_2 = \lambda w_2 \end{cases}.$$

Пример. Проверить, коллинеарны ли векторы

$$\overline{a}(-2;\,4),\ \overline{b}(1;\,-2).$$

Решение: Выясним, существует ли для данных векторов коэффициент пропорциональности λ, такой, чтобы выполнялись равенства

$\begin{cases} v_1 = \lambda w_1 \\ v_2 = \lambda w_2 \end{cases}$: $\begin{cases} -2 = \lambda \cdot 1 \\ 4 = \lambda \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$, значит, данные векторы коллинеарны.

ИЛИ, сразу составить пропорцию

$\dfrac{v_1}{w_1} = \dfrac{v_2}{w_2}$ и посмотреть, будет ли она верной.

Составим пропорцию из отношений соответствующих координат векторов:
$\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{-2}$ Сокращаем: $-2 = -2$,

таким образом, соответствующие координаты пропорциональны, следовательно, $\overline{a} \parallel \overline{b}$

Пример 2. - творческий пример **для самостоятельного решения:**

При каком значении параметра α векторы $\overline{a}(1;\,\alpha),\ \overline{b}(5;\,-3)$ будут коллинеарны?

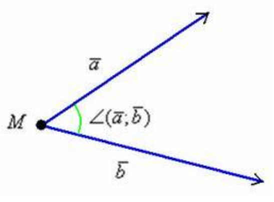
Получилось? Сверим решение:

Решение: *составим пропорцию* $\dfrac{v_1}{w_1} = \dfrac{v_2}{w_2}$ *из соответствующих координат векторов:*
$\dfrac{1}{5} = \dfrac{\alpha}{-3} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{3}{5}$

Ответ: *при* $\alpha = -\dfrac{3}{5}$

Скалярное произведение векторов

Сначала про **угол между векторами**. Рассмотрим свободные ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.Если отложить данные векторы от произвольной точки M, то получится картинка, которую многие уже представили мысленно:



Угол между векторами $\angle(\vec{a};\vec{b})$ может принимать значения от 0 до 180 градусов включительно: $0^\circ \le \angle(\vec{a};\vec{b}) \le 180^\circ$ В литературе значок угла $\angle$ часто пропускают и пишут просто $(\vec{a};\vec{b})$.

Определение: Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **ЧИСЛО**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$$

Результат скалярного произведения - ЧИСЛО!!!

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

$$|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 5,\quad \angle(\vec{a};\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$$

Решение: Используем формулу

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b}) = 2\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

(значения косинуса можно найти в *тригонометрической таблице*).

Ответ: $\vec{a}\vec{b} = 5\sqrt{3}$

Пример 2. - пример для самостоятельного решения

Найти $\vec{c}\vec{d}$, если $|\vec{c}| = 3,\quad |\vec{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен 135°.

Получилось? Сверим:

$$\vec{c}\vec{d} = |\vec{c}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos\angle(\vec{c};\vec{d}) = 3\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ = 3\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3$$

Теорема. Скалярное произведение векторов $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\bar{a}\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Следствие 1. Ненулевые векторы $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Следствие 2. Косинус угла α между ненулевыми векторами $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

(Угол находят по таблицам Брадиса)

Свойства скалярного умножения векторов:

1. $\bar{a}^2 \geq 0$, причём $\bar{a}^2 > 0$ при $\bar{a} \neq \bar{0}$.
2. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ (переместительный закон).
3. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ (распределительный закон).
4. $(k\bar{a})\bar{b} = k(\bar{a}\bar{b})$ (сочетательный закон).

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов:

$\bar{a}(2; -5)$ и $\bar{b}(-1; 0)$

Решение:

Здесь даны векторы плоскости. По формуле $\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1w_1 + v_2w_2$:
$\bar{a}\bar{b} = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 = -2 + 0 = -2$

Ответ: -2

Пример 4. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что

$$|\overline{a}| = 4, \quad |\overline{b}| = 2\sqrt{2}, \quad \overline{a}\overline{b} = 8.$$

Решение:

Используем формулу:

$$\cos\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{8}{4\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

то:

$$\angle(\overline{a};\overline{b}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{4}$ рад. $= 45°$

Примечание: *С помощью скалярного произведения векторов находят работу постоянной силы по перемещению материальной точки на вектор* $\overline{S}$.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\overline{F}$, образующей угол φ с вектором перемещения $AB = \overline{S}$ (рис. 2).

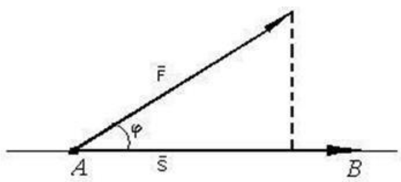


рис. 13. Физический смысл скалярного произведения

Из физики известно, что работа силы $\overline{F}$ при перемещении $\overline{S}$ равна $A = \overline{F}\cdot\overline{S}\cdot\cos\varphi$,

то есть

$$A = \overline{F}\cdot\overline{S}.$$

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 5.

Выяснить, будут ли перпендикулярными векторы ***KL*** и ***MN***, если

$K(3;5)$, $L(-2;0)$, $M(8;-1)$, $N(1;4)$

Решение:
Найдём координаты векторы:

$\overline{KL}(-2-3;\,0-5)=\overline{KL}(-5;\,-5)$
$\overline{MN}(1-8;\,4-(-1))=\overline{MN}(-7;\,5)$

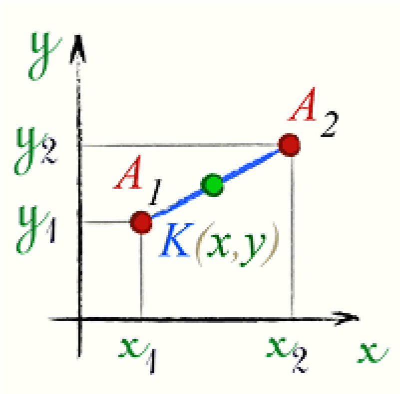
Вычислим их скалярное произведение:
$\overline{KL}\cdot\overline{MN}=-5\cdot(-7)+(-5)\cdot 5=35-25=10\neq 0$,

значит, векторы ***KL*** и ***MN*** не перпендикулярны.

Ответ: векторы ***KL*** и ***MN*** не перпендикулярны.

Координаты середины отрезка на плоскости

Координаты середины отрезка A_1A_2 равны полусуммам соответствующих координат его концов.



Контрольные вопросы:

1. Что такое вектор?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы являются равными?
4. Какие операции выполняют над векторами?
5. Формула разложения вектора по базису
6. Как найти координаты вектора ?
7. Как найти длину вектора?
8. Какое должно выполняться условие у коллинеарных векторов?
9. Как выполняют действия над векторами, заданными своими координатами в пространстве (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число)?
10. Формула для вычисления координат середины отрезка
11. Что называется скалярным произведением векторов?
12. В чем заключается условие перпендикулярности двух векторов?
13. Формула для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами.
14. Формула для вычисления угла между векторами.
15. В чем заключается физический смысл скалярного произведения?

Выполнить задания:

Пример 1.

Даны точки $A(-4;\,5)$ и $B(1;\,-3)$.

Найти координаты векторов и их длины $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

Пример 2.

Даны точки $A(2;\,0)$, $B(-7;\,1)$ и $C(4;\,1)$.

Выяснить, перпендикулярны ли векторы ***AB*** и ***BC, AB и AC.***

Если не перпендикулярны, то найти угол между ними.

Пример 3.

Даны векторы $\overline{a}(-2;\,6)$, $\overline{c} = 4\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j}$

Выяснить, коллинеарны ли векторы ***a*** и ***c.***