Тема: Геометрическая прогрессия

Основные знания и умения:

Знать:

определение геометрической прогрессии; формулу общего члена геометрической прогрессии; характеристическое свойство геометрической прогрессии; формулу суммы *n*-первых членов геометрической прогрессии.

Уметь:

- распознавать геометрическую прогрессию среди числовых последовательностей,

- находить любой член геометрической прогрессии по её первому члену и знаменателю; первый члена по её n члену и знаменателю; знаменатель геометрической прогрессии по её первому и n члену; сумму n первых членов геометрической прогрессии; первый член геометрической прогрессии по её n члену и сумме n первых членов; номер n-го члена геометрической прогрессии; n-го член геометрической прогрессии по её первому члену и сумме n первых членов;

- решать задачи, связанные с геометрической прогрессией.

Актуализация опорных знаний:

Примеры последовательностей

Последовательность положительных четных чисел:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Последовательность положительных нечетных чисел:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...

Последовательность квадратов целых чисел:

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Добавьте к каждой последовательности еще по 5 чисел

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность (первый член отличен от нуля) каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число:

$$\boldsymbol{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots}$$

для любого натурального числа n выполняется условие:

$$\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q,}$$

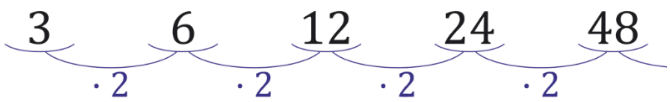
где $q \neq 0$ — некоторое число.

Таким образом, отношение последующего члена данной геометрической прогрессии к предыдущему есть число постоянное:

$$b_2/b_1 = b_3/b_2 = \dots = b_{n+1}/b_n = q.$$

Число q называют *знаменателем геометрической прогрессии.*

Например, последовательность 3; 6; 12; 24; 48… является геометрической прогрессией, потому что каждый следующий элемент отличается от предыдущего в два раза (иначе говоря, может быть получен из предыдущего умножением его на два):



Пример 1. Найти первые пять членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 1$, $q = –3$.

Решение

$b_1 = 1$, $b_2 = b_1 \cdot q = 1 \cdot (–3) = –3$, $b_3 = b_2 \cdot q = –3 \cdot (–3) = 9$,

$b_4 = b_3 \cdot q = 9 \cdot (–3) = –27$, $b_5 = b_4 \cdot q = –27 \cdot (–3) = 81$.

Для геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q имеют место следующие *свойства*:

- прогрессия является возрастающей, если выполнено одно из следующих условий:

  $b_1 > 0$ и $q > 1$;

  $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$;

- прогрессия является убывающей, если выполнено одно из следующих условий:

  $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$;

  $b_1 < 0$ и $q > 1$.

Если $q < 0$, то геометрическая прогрессия является знакочередующейся: её члены с нечётными номерами имеют тот же знак, что и её первый член, а члены с чётными номерами — противоположный ему знак.

Для геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q её n-й член может быть найден по формуле:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.}$$

формула общего члена (n-ого члена) геометрической прогрессии

Запомните: Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать её первый член и знаменатель.

Пример 2. Найти седьмой член геометрической прогрессии 1, 2, 4, . . .

Решение

По условию

$b_1 = 1$, $q = 2$,

По формуле общего члена геометрической прогрессии:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Найдем b_7

$b_7 = b_1 \cdot q^6 = 1 \cdot 2^6 = 64$.

Ответ: $b_7 = 64$.

Пример 3. *– для самостоятельного решения*

Найдите пятый член геометрической прогрессии: -3; 6;....

Получилось? Сверим решение:

Решение

1-й способ (с помощью формулы n -члена)

По формуле n-ого члена геометрической прогрессии:

$\boldsymbol{b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} = b_1 \cdot q^4}$ **.**

Так как $b_1 = -3$, $b_2 = 6$, найдем знаменатель:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{-3} = -2, \text{ то } b_5 = -3 \cdot (-2)^4 = -3 \cdot 16 = -48.$$

2-й способ (с помощью рекуррентной формулы)

Так как знаменатель прогрессии равен -2 ($q = -2$), то:

$b_3 = 6 \cdot (-2) = -12$; $b_4 = -12 \cdot (-2) = 24$; $b_5 = 24 \cdot (-2) = -48$.

Ответ: $b_5 = -48$.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии:

Так как

$$b_{n-1} = b_1 \cdot q^{n-2},$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot q^n,$$

то,

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},}$$

каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому (пропорциональному) предшествующего и последующего членов.

Пример 4. Доказать, что последовательность, которая задаётся формулой $b_n = -3 \cdot 2^n$, является геометрической прогрессией.

Доказательство:

Имеем:

$$b_n = -3 \cdot 2^n,$$

$$b_{n-1} = -3 \cdot 2^{n-1},$$

$$b_{n+1} = -3 \cdot 2^{n+1}.$$

Следовательно,

$$b_n^2 = (-3 \cdot 2^n)^2 = (-3 \cdot 2^{n-1}) \cdot (-3 \cdot 2^{n+1}) = b_{n-1} \cdot b_{n+1},$$

Что и требовалось доказать.

Отметим, что n-й член геометрической прогрессии можно найти не только через b_1, но и любой предыдущий член b_k, для чего достаточно воспользоваться формулой

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}.$$

Например, для b_5 можно записать

$$b_5 = b_1 \cdot q^4,$$

$$b_5 = b_2 \cdot q^3,$$

$$b_5 = b_3 \cdot q^2,$$

$$b_5 = b_4 \cdot q.$$

Примечание:

Так как

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k},$$

$$b_n = b_{n-k} \cdot q^k,$$

то,

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

то есть,

> *квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго равен произведению равноотстоящих от него членов этой прогрессии.*

Например, в геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, . . .

1) $b_6^2 = 32^2 = 1024 = 16 \cdot 64 = b_5 \cdot b_7$;

2) $1024 = b_{11} = b_6 \cdot q^5 = 32 \cdot 2^5 = 1024$;

3) $b_6^2 = 32^2 = 1024 = 8 \cdot 128 = b_4 \cdot b_8$;

Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии

Сумма

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 0$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.}$$

Пример 5. Дана геометрическая прогрессия 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, . . .

Найти сумму первых десяти членов геометрической прогрессии.

Решение

$S_{10} = 1 + 2 + \ldots + 512 = 1023$

Воспользуемся формулой

$S_{10} = 1 \cdot (1 - 2^{10}) / (1 - 2) = 1023$

Ответ: 1023

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называют бесконечную геометрическую прогрессию, модуль знаменателя которой меньше 1, то есть

$$|q| < 1.$$

Заметим, что бесконечно убывающая геометрическая прогрессия может не быть убывающей последовательностью. Это соответствует случаю

$$-1 < q < 0.$$

При таком знаменателе последовательность знакопеременная. Например,

$$1,\ -{}^1/_2,\ {}^1/_4,\ -{}^1/_8,\ .\ .\ .\ .$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число, к которому неограниченно приближается сумма первых n членов прогрессии при неограниченном возрастании числа n. Это число всегда конечно и выражается формулой

$$\boldsymbol{S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Обобщение и систематизация знаний.

Формулы геометрической прогрессии:

Определение (рекуррентная формула)	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Знаменатель	$q = b_{n+1} : b_n$
Формула ***n***-го члена	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма ***n*** первых членов (сумма беск. убыв.геом. прогрес.)	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ $\qquad S = \dfrac{b_1}{1-q}$
Характеристическое свойство	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

Контрольные вопросы:

1. Какая последовательность называется геометрической прогрессией?
2. Что такое знаменатель геометрической прогрессии?
3. Каким свойством обладают члены геометрической прогрессии?
4. Как найти неизвестный член геометрической прогрессии?
5. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии?

Выполнить задания:

Пример 1.

Дана геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...

Известно, что $b_1 = 2/3$, $q = -3$. Найти b_6

Ответ: -162.

Пример 2.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 12, 4, 4/3 , …

Ответ: 18.

Пример 3.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150.

Найти b_1, если $q = 1/3$

Ответ: 100.

Пример 4. Найти сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвёртый равен 24.
Ответ: $S_8 = 255$ или $S_8 = 765$

Ребята, ответы такие получились?

Если нет – давайте посмотрим, где допущена ошибка.

Ключ к решению:

Пример 1. Дана геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...

Известно, что $b_1 = 2/3$, $q = -3$. Найти b_6

Решение. В этом случае в основе решения лежит формула n-го члена геометрической прогрессии.

Подставив в эту формулу n = 6 получим:

$b_6 = b_1 \cdot q^5 = 2/3 \cdot (-3)^5 = -162$

Ответ -162.

Пример 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 12, 4, 4/3 , …

Решение

$b_1= 12$, $b_2= 4$,

$q = 4/12 = 1/3$

$S = 12 / (1 - 1/3) = 12 / (2/3) = 12 \cdot 3 / 2 = 18$

Ответ 18.

Пример 3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150.

Найти b_1, если $q = 1/3$

Решение

$$S = \frac{b_1}{1-q} \text{ при } |q| < 1$$

$150 = b_1 / (1- 1/3)$

$b_1 = 150\cdot 2/3$

$b_1= 100$

Ответ 100.

Пример 4. Найти сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвёртый равен 24.

Решение

Так как $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = 4$, то $q = -2$ или $q = 2$. Если $q = -2$, то $b_1 = \frac{6}{-2} = -3$; в этом случае $S_8 = \frac{-3 \cdot ((-2)^8 - 1)}{-2 - 1} = (-2)^8 - 1 = 256 - 1 = 255$. Если $q = 2$, то $b_1 = \frac{6}{2} = 3$; в этом случае $S_8 = \frac{3 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (256 - 1) = 765$. Таким образом, задача имеет два решения: $S_8 = 255$ или $S_8 = 765$.