

## Тема: Арифметическая прогрессия

### Основные знания и умения:

*Знать:*

определение арифметической прогрессии; формулу общего члена арифметической прогрессии; характеристическое свойство арифметической прогрессии; утверждение арифметической прогрессии; формулу суммы  $n$ -первых членов арифметической прогрессии.

*Уметь:*

- распознавать арифметическую прогрессию среди числовых последовательностей,
- находить любой член арифметической прогрессии по её первому члену и разности; первый члена по её  $n$  члену и разности; разность арифметической прогрессии по её первому и  $n$  члену; сумму  $n$  первых членов арифметической прогрессии; первый член арифметической прогрессии по её  $n$  члену и сумме  $n$  первых членов; номер  $n$ -го члена арифметической прогрессии;  $n$ -го член арифметической прогрессии по её первому члену и сумме  $n$  первых членов;
- решать задачи, связанные с арифметической прогрессией.

### Актуализация опорных знаний:

Рассмотрим последовательность: 3, 8, 13, 18, 23, 28, ...

1. Назовите первый член этой последовательности. *Ответ: 3*
2. Какое число является пятым членом последовательности? *Ответ: 23*
3. Назовите её восьмой член. *Ответ: 38*
4. Каким свойством обладают члены данной последовательности? *Ответ: Каждый следующий отличается от предыдущего на 5, или каждое следующее число больше предыдущего на 5.*

**У нас совпали ответы?**

**Хорошо, продолжаем.**

**Запомните:**

$a_1 = 4$

Число	4	7	-8	13	-5	-6	0
Порядковый номер	1	2	3	4	5	6	7

## Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

т.е. для любого натурального числа  $n$  выполняется условие:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

...

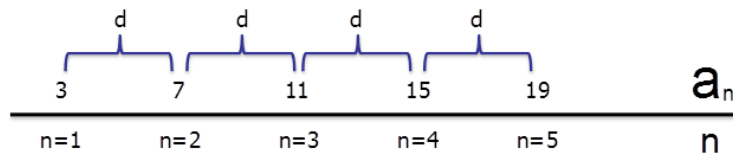
$$a_n = a_1 + (n - 1) d.$$

где  $d$  — некоторое число, называемое *разностью арифметической прогрессии*.

Таким образом, разность между последующим и предыдущим членами данной арифметической прогрессии всегда постоянна:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n = d.$$

Например:



- Если  $d > 0$ , то прогрессия возрастающая

Например, а)  $1, 2, 3, \dots$  ( $d = 1$ )

б) если  $a_1 = 3$ ,  $d = 4$ , то первые пять членов последовательности находим следующим образом:

$$a_1 = 3,$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7,$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11,$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15,$$

$$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19.$$

- Если  $d < 0$ , то прогрессия убывающая

Например,  $5; 2,5; 0; -2,5; -5...$

Для арифметической прогрессии с первым членом  $a_1$  и разностью  $d$  её  $n$ -й член может быть найден по формуле:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d.$$

- формула общего члена (n-ого члена) арифметической прогрессии

**Запомните!** Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать её первый член и разность.

**Пример 1.** Найти тридцатый член арифметической прогрессии

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

*Решение*

По условию:

$$a_1 = 1, a_2 = 4$$

значит,

$$d = 4 - 1 = 3,$$

По формуле  $n$ -ого члена:

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)d = a_1 + 29d$$

$$a_{30} = 1 + 29 \cdot 3 = 88.$$

Ответ:  $a_{30} = 88$

**Пример 2.** – *выполнить самостоятельно*

В арифметической прогрессии  $(a_n)$   $a_1 = -6$ ,  $a_2 = -8$ . Найдите двадцать второй член прогрессии.

*Получилось? Давайте сверим:*

*Решение*

По формуле  $n$ -ого члена:

$$a_{22} = a_1 + d(22 - 1) = a_1 + 21d$$

По условию:

$$a_1 = -6, \text{ значит } a_{22} = -6 + 21d.$$

Необходимо найти разность прогрессий:

$$d = a_2 - a_1 = -8 - (-6) = -2$$

$$a_{22} = -6 + 21 \cdot (-2) = -48.$$

Ответ:  $a_{22} = -48$ .

**Пример 3.** Дано: арифметическая прогрессия  $a_1 = 3, d = -1,5$ . Укажите наибольшее значение  $n$ , для которого выполняется неравенство  $a_n > -6$ .

*Решение*

Воспользуемся формулой  $n$ -го члена.

$$a_n = a_1 + d(n - 1) > -6.$$

Подставим данные в условии значения в формулу:

$$3 - 1,5n + 1,5 > -6$$

$$6 + 4,5 > 1,5n$$

$$n < 7$$

**Ответ:** Наибольшее значение  $n = 6$ .

### **Характеристическое свойство арифметической прогрессии**

Так как

$$a_{n-1} = a_1 + (n - 2)d,$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$a_{n+1} = a_1 + nd,$$

то,

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
-------------------------------------

каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

Например, в арифметической прогрессии 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, ...

$$a_{10} = (a_9 + a_{11})/2$$

$$28 = (25 + 31)/2$$

**Пример 4.** В арифметической прогрессии  $(a_n)$   $a_{74} = 34$ ;  $a_{76} = 156$ . Найдите семьдесят пятый член этой прогрессии.

*Решение*

Для арифметической прогрессии характеристическое свойство имеет вид

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1,$$

Из этого следует:

$$a_{75} = \frac{a_{75-1} + a_{75+1}}{2} = \frac{a_{74} + a_{76}}{2}.$$

Подставим данные в формулу:

$$a_{75} = \frac{a_{74} + a_{76}}{2} = \frac{34 + 156}{2} = 95.$$

Ответ: 95.

**Утверждение:** Для любой конечной арифметической прогрессии

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

сумма членов, равноудаленных от концов, равна сумме первого и последнего членов:

$$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_1 + a_n$$

Например, в арифметической прогрессии 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, ...

$$a_2 + a_{12} = a_5 + a_9,$$

$$\text{т.к. } a_2 + a_{12} = 4 + 34 = 38,$$

$$a_5 + a_9 = 13 + 25 = 38.$$

**Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии**

Дано: арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots$

Сумма членов равна:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

Например, в арифметической прогрессии 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, ...

$$S_{10} = 1 + 4 + \dots + 28 = (1 + 28) \cdot 10/2 = 145$$

Это громоздко, поэтому будем пользоваться формулой:

$S_n =$	$\frac{a_1 + a_n}{2}$	$\cdot n.$
---------	-----------------------	------------

Сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних слагаемых на число слагаемых

**Пример 5.** Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:  
 $a_1 = -5$ ,  $d = 0,5$

**Решение**

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_{12} = \frac{2 \cdot (-5) + 11 \cdot 0,5}{2} \cdot 12 = (-10 + 5,5) \cdot 6 = -27$$

**Ответ:** -27

**Обобщение и систематизация знаний.**

## *Формулы арифметической прогрессии:*

Определение	$a_{n+1} = a_n + d$
Разность	$d = a_{n+1} - a_n$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
Сумма n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$
Свойство	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

**Контрольные вопросы:**

1. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Что такое разность арифметической прогрессии?
3. Каким свойством обладают члены арифметической прогрессии?
4. Как найти неизвестный член арифметической прогрессии?
5. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии?

**Выполнить задания:**

**Задание 1.** Какие из последовательностей являются арифметическими прогрессиями?

1.  $-2; 0; -2; 0; -2; 0; \dots$
2.  $4; 8; 16; 32; 64; \dots$
3.  $7; 5; 3; 1; -1; \dots$
4.  $9,2; 11,3; 9,3; 11,4; 9,4; \dots$
5.  $4,2; 4,5; 4,8; 5,1; 5,4; \dots$

**Задание 2.** Заполнить таблицу

№ п/п	$a_1$	d	n	$a_n$	$S_n$
1	3	2	5		
2	4	- 1	7		
3	- 2	3	6		
4	- 5	2	8		
5	1,2	3	5		
6	- 1,5	- 2	7		
7		3	6	17	
8		2	8	9	
9	- 2,1	4		13,9	
10	3	2,4		27	
11	- 3		10		15
12			12	3	22,8

Еще не устали?

Для желающих можно выполнить задание 3.

**Задание 3.** Заполнить таблицу

№ п/п	$a_1$	$d$	$n$	$a_n$	$m$	$a_m$	$S_n$
1			9	13	8	11	
2			8	-2,1	7	-1,8	
3			11	35	9	32	
4			14	34	8	46	
5			15	48	12	43,5	
6	0,8			3,4			23,1
7	-2,4			-10			-12,4
8	-14			0			-56
9			15	18	17	24	
10			6	18	10	12	

Ответы:

**Задание 1:** 3 и 5

**Задание 2.**

№ п/п	$a_1$	$d$	$n$	$a_n$	$S_n$
1	3	2	5	11	35
2	4	- 1	7	- 2	7
3	- 2	3	6	13	33
4	- 5	2	8	9	16
5	1,2	3	5	13,2	36
6	- 1,5	- 2	7	- 13,5	-52,5
7	2	3	6	17	57
8	- 5	2	8	9	16
9	- 2,1	4	5	13,9	29,5
10	3	2,4	11	27	165
11	- 3	1	10	6	15
12	0,8	0,2	12	3	22,8



**Задание 3.**

№ п/п	$\alpha_1$	$d$	$n$	$\alpha_n$	$m$	$\alpha_m$	$S_n$
1	-3	2	9	13	8	11	45
2	0	-0,3	8	-2,1	7	-1,8	-8,4
3	20	1,5	11	35	9	32	302,5
4	60	-2	14	34	8	46	658
5	27	1,5	15	48	12	43,5	562,5
6	0,8	0,26	11	3,4	-	-	23,1
7	-2,4	-7,6	2	-10	-	-	-12,4
8	-14	2	8	0	-	-	-56
9	-24	3	15	18	17	24	-45
10	-25,5	-1,5	6	18	10	12	-22,5

**РЕБЯТА!**  
**ВЫ МОЛОДЦЫ!!!**