

Тема: Решение упражнений на арифметическую и геометрическую прогрессии

Основные знания и умения:

Знать:

1. Определение арифметической прогрессии; формулу общего члена арифметической прогрессии; характеристическое свойство арифметической прогрессии; утверждение арифметической прогрессии; формулу суммы n -первых членов арифметической прогрессии.
2. Определение геометрической прогрессии; формулу общего члена геометрической прогрессии; характеристическое свойство геометрической прогрессии; формулу суммы n -первых членов геометрической прогрессии

Уметь:

1. Распознавать арифметическую прогрессию и геометрическую прогрессию среди числовых последовательностей.
2. Решать задачи, связанные с арифметической и геометрической прогрессией.

Актуализация опорных знаний:

Ответить на вопросы:

1. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Что такое разность арифметической прогрессии?
3. Каким свойством обладают члены арифметической прогрессии?
4. Как найти неизвестный член арифметической прогрессии?
5. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии?
6. Какая последовательность называется геометрической прогрессией?
7. Что такое знаменатель геометрической прогрессии?
8. Каким свойством обладают члены геометрической прогрессии?
9. Как найти неизвестный член геометрической прогрессии?
10. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии?

Формулы арифметической прогрессии:

Определение	$a_{n+1} = a_n + d$
Разность	$d = a_{n+1} - a_n$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
Сумма n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1) \cdot d}{2} \cdot n$
Свойство	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

Формулы геометрической прогрессии:

Определение
(рекуррентная формула)

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Знаменатель

$$q = b_{n+1} : b_n$$

Формула **n**-го члена

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Сумма **n** первых членов (сумма беск. убыв. геом. прогрес.)

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Характеристическое свойство

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ УСТНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Являются ли следующие последовательности арифметической прогрессией? Почему? а) 1; 3; 5; 7; 9;....
б) 1; 4; 9; 16; 25; в) 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17;
2. Найти разность арифметической прогрессии:
а) 1; 5; 9... б) 105; 100.... в) -13; -15; -17 г) 11; a_2 ; 19,.....
3. ГИА. Из арифметических прогрессий выберите ту, среди членов которой есть число -10 .
а) $a_n = 2n + 10$; б) $a_n = -3n$;
в) $a_n = -3n + 2$; г) $a_n = -4n - 8$;
4. ГИА. Какое число не является членом арифметической прогрессии 4; 8; 12; 16?

Арифметическая прогрессия.

Пример. Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Найти:

- а) Известно, что $a_1 = 5$ $d = 3$. Найти a_{23}
- б) Известно, что $a_1 = 4$ $d = 5$ $a_n = 109$. Найти n
- в) Известно, что $d = -1$ $a_{22} = 15$. Найти a_1
- г) Известно, что $a_1 = -3$ $a_{10} = 24$. Найти d

Решение:

- а) $a_{23} = a_1 + 22d = 5 + 66 = 71$
- б) $a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + 5(n - 1) = 5n - 1 = 109$ $5n = 110 \Rightarrow n = 22$
- в) $a_{22} = a_1 + 21d = a_1 - 21 = 15 \Rightarrow a_1 = 36$
- г) $a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 24 \Rightarrow d = 3$

Геометрическая прогрессия.

Пример. Дана геометрическая прогрессия

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

Найти:

- а) Известно, что $b_1 = 6$ $q = 3$. Найти b_5
- б) Известно, что $b_1 = 6$ $q = 2$ $b_n = 768$. Найти n
- в) Известно, что $q = -2$ $b_6 = 96$. Найти b_1
- г) Известно, что $b_1 = -2$ $b_{12} = 4096$. Найти q

Решение:

- а) $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 6 \cdot 3^4 = 486$
- б) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} = 768$
 $2^{n-1} = \frac{768}{6} = 128$, так как $2^7 = 128 \Rightarrow n - 1 = 7; n = 8$
- в) $b_6 = b_1 \cdot q^5 = b_1 \cdot (-2)^5 = -32b_1 = 96 \Rightarrow b_1 = -3$
- г) $b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = -2 \cdot q^{11} = 4096 \Rightarrow q^{11} = -2048 \Rightarrow q = -2$

Арифметическая прогрессия.

Пример.

При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном остается 7, а при делении девятого члена на пятый в частном получается 2, а в остатке 5. Найти тридцатый член прогрессии.

Решение.

Запишем последовательно формулы 2, 5 и 9 членов нашей прогрессии.

$$a_2 = a_1 + d \quad a_5 = a_1 + 4d \quad a_9 = a_1 + 8d$$

Так же из условия знаем:

$$a_9 = 7a_2 \quad a_9 = 2a_5 + 5$$

Или:

$$a_1 + 8d = 7(a_1 + d) \quad a_1 + 8d = 2(a_1 + 4d) + 5$$

Составим систему уравнений:

Решив систему получаем:

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 7(a_1 + d) \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 4d) + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 6a_1 \\ d = a_1 + 5 \end{cases} \quad d = 6a_1 = 1$$

Найдем a_{30}

$$a_{30} = a_1 + 29d = 175$$

Геометрическая прогрессия

Решение задач

15) Чет числа составляют убывающую геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если сумма крайних членов равна 135, а сумма средних членов равна 90.

Пусть (b_n) - данная геометрическая прогрессия, тогда

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = 135, & b_1 + b_1q^3 = 135, & b_1(1 + q^3) = 135, \\ b_2 + b_3 = 90, & b_1q + b_1q^2 = 90, & b_1q(1 + q) = 90, \end{cases}$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \quad \begin{cases} q = 2, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad q = \frac{1}{2} \quad b_1 = 120$$

Ответ: 120; 60; 30; 15.

Желаете еще поработать?

Выполнить задания

Арифметическая прогрессия.

Пример. Дана конечная арифметическая прогрессия

Найти:

а) s_{22} , если $a_1 = 7$ $d = 2$

б) d , если $a_1 = 9$ $s_8 = 144$

Решение.

а) Воспользуемся второй формулой суммы

$$S_{22} = \frac{2a_1 + d(22 - 1)}{2} \cdot 22 = \frac{14 + 2(22 - 1)}{2} \cdot 22 = 616$$

б) В этом примере воспользуемся первой формулой:

$$S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4a_1 + 4a_8$$

$$144 = 36 + 4a_8$$

$$a_8 = 27$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 9 + 7d$$

$$d = 2\frac{4}{7}$$

Геометрическая прогрессия.

Пример.

Найти сумму первых семи членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 4, а знаменатель 3.

Решение.

$$S_7 = \frac{4(3^7 - 1)}{3 - 1} = 2(3^7 - 1) = 4372$$

Пример. Найти пятый член геометрической прогрессии, у которой известно: $b_1 = -3$; $b_n = -3072$; $S_n = -4095$

$$\text{Решение. } b_n = (-3) \cdot q^{n-1} = -3072 \quad q^{n-1} = 1024 \quad q^n = 1024q$$

$$S_n = \frac{-3 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = -4095$$

$$-4095(q - 1) = -3 \cdot (q^n - 1)$$

$$-4095(q - 1) = -3 \cdot (1024q - 1)$$

$$1365q - 1365 = 1024q - 1$$

$$341q = 1364$$

$$q = 4$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = -3 \cdot 4^4 = -3 \cdot 256 = -768$$

Дополнительно - Для успевающих учащихся

Пример 3. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а третьего и четвертого — 168,75. Найдите первых три члена прогрессии.

Решение

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 108 \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 168,75 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1 = \frac{108}{q+1} \\ b_1 q^2 (q+1) = 168,75 \end{cases}$$

Подставим b_1 во второе уравнение:

$$\frac{108}{q+1} \cdot q^2 (q+1) = 168,75 \Leftrightarrow q^2 = \frac{168,75}{108} = 1,5625 \Leftrightarrow q = 1,25.$$

Тогда:

$$b_1 + 1,25b_1 = 108 \Leftrightarrow b_1 = 48; \quad b_2 = b_1 q = 48 \cdot 1,25 = 60; \quad b_3 = b_1 q^2 = 48 \cdot 1,25^2 = 75.$$

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Пример 4.

В арифметической прогрессии шестой член равен 23, а одиннадцатый член равен 48. Найти первый член этой прогрессии и ее разность

(a_n) — а.п. $a_6 = 23$, $a_{11} = 48$. Найти a_1 и d

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{11} = a_1 + 10d \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 5d = 23 \quad (-1) \\ a_1 + 10d = 48 \end{cases} \quad \begin{cases} -a_1 - 5d = -23 \\ a_1 + 10d = 48 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 5 \\ a_1 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 5d = 25 & a_1 + 10 \cdot 5 = 48 \\ d = 5 & a_1 + 50 = 48 \\ & a_1 = 48 - 50 = -2 \end{array}$$

Пример 5. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 4, а частное от деления пятого члена на седьмой равно 9. Найдите четвертый член этой прогрессии.

Решение

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_5 = 4 \\ \frac{b_5}{b_7} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot b_1 \cdot q^4 = 4 \\ \frac{b_1 \cdot q^4}{b_1 \cdot q^6} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 q^4 = 4 \\ \frac{1}{q^2} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1^2 (q^2)^2 = 4 \\ q^2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$b_1^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 4;$$

$$b_1^2 = 4 \cdot 9^2 = 324;$$

$$b_1 = \pm 18.$$

При $q = \frac{1}{3} \quad b_1 = 18; \quad b_4 = b_1 \cdot q^3 = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}.$

При $q = -\frac{1}{3} \quad b_1 = 18; \quad b_4 = b_1 \cdot q^3 = 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3}.$

При $b_1 = -18, q = \pm \frac{1}{3}$ получим те же значения: $b_4 = \pm \frac{2}{3}.$

При $q = -\frac{1}{3}, b_1 = 18; \quad b_4 = b_1 \cdot q^3 = 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3}.$

При $b_1 = -18, q = \pm \frac{1}{3}$ получим те же значения $b_4 = \pm \frac{2}{3}.$

РЕБЯТА!

ВЫ МОЛОДЦЫ!!!